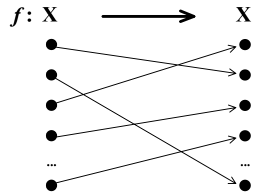
PERMUTACJE

Permutacją zbioru *n*-elementowego *X* nazywamy dowolną wzajemnie jednoznaczną funkcję f: $X \to X$



Przykład permutacji

$X = \{ a, b, c, d \}$ $\qquad f(a) = d,\ f(b) = a,\ f(c) = c,\ f(d) = b$

Zapis permutacji w postaci tablicy: $\qquad f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & c & b \end{pmatrix}$,

w górnym wierszu - elementy zbioru X w dowolnej kolejności,
w dolnym wierszu - pod elementem $x \in X$ wypisujemy $f(x)$.

Jeśli uporządkujemy elementy w górnym wierszu tablicy, to danej permutacji odpowiada jednoznacznie wektor z dolnego wiersza, składający się z elementów zbioru X: $\quad (d, a, c, b)$

Zatem dowolny wektor n-elementowy, zawierający <u>różne</u> elementy zbioru X (dla $|X| = n$), możemy także nazywać permutacją zbioru n-elementowego.

Przyjmujemy dla uproszczenia, że $X = \{ 1, 2, 3, ..., n \}$

$\boldsymbol{S_n}$ - zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{ 1, 2, ..., n \}$
$\boldsymbol{f \in S_n}$ identyfikujemy z wektorem $(a_1, ..., a_n)$, gdzie $a_i = f(i)$
lub zapisujemy w postaci tablicy: $\qquad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$

<u>Definicja</u>
Złożeniem permutacji f i g nazywamy permutację fg, taką że $\qquad fg(i) = f(g(i))$

Przykład złożenia permutacji

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Definicja</u>
Permutację $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}$ nazywamy **permutacją identycznościową**

Dla każdej permutacji f zachodzi: $\qquad ef = fe = f$

<u>Definicja</u>
Permutacją odwrotną do $f \in S_n$ nazywamy permutację $f^{-1} \in S_n$, taką że $\qquad f^{-1}f = e$

$$f = \begin{pmatrix} ... & i & ... \\ ... & j & ... \end{pmatrix} \qquad f^{-1} = \begin{pmatrix} ... & j & ... \\ ... & i & ... \end{pmatrix}$$

Dla każdej permutacji f zachodzi: $\qquad f^{-1}f = f f^{-1} = e$

Rozważmy trzy dowolne permutacje $f, g, h \in S_n$:

$$f = \begin{pmatrix} ... & k & ... \\ ... & l & ... \end{pmatrix}, \ g = \begin{pmatrix} ... & j & ... \\ ... & k & ... \end{pmatrix}, \ h = \begin{pmatrix} ... & i & ... \\ ... & j & ... \end{pmatrix}$$

$$f(gh) = \begin{pmatrix} ... & i & ... \\ ... & l & ... \end{pmatrix} \text{ i } (fg)h = \begin{pmatrix} ... & i & ... \\ ... & l & ... \end{pmatrix}$$

zatem zachodzi $\qquad f(gh) = (fg)h$ (łączność złożenia)

Dla dowolnych permutacji $f, g, h \in S_n$ spełnione są zależności:

$$\boxed{\begin{gathered} f(gh) = (fg)h \\ fe = ef = f \\ f^{-1}f = ff^{-1} = e \end{gathered}}$$

Zbiór permutacji S_n jest **grupą** ze względu na działanie złożenia (grupą symetryczną stopnia n)

Dowolny podzbiór $G \subseteq S_n$ spełniający warunki:

$$f, g \in G \Rightarrow fg \in G \qquad i \qquad f \in G \Rightarrow f^{-1} \in G$$

nazywany jest **grupą permutacji stopnia *n***

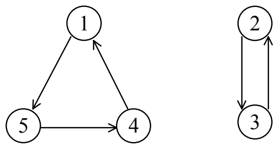
Przykłady grup permutacji stopnia 3

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

GRAFICZNA REPREZENTACJA PERMUTACJI

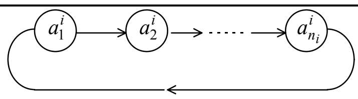
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$



Permutacja przedstawiana jest w formie **grafu** o zbiorze wierzchołków $X = \{ 1, ..., n \}$:
z wierzchołka $l \in X$ wychodzi dokładnie jeden łuk do wierzchołka $f(l)$,
do wierzchołka $l \in X$ dochodzi dokładnie jeden łuk z wierzchołka $f^{-1}(l)$.

---

cykl i-ty o długości n_i :



$f_i(a_1^i) = a_2^i, \; f_i(a_2^i) = a_3^i, \; ..., \; f_i(a_{n_i}^i) = a_1^i$

po uzupełnieniu $f_i(l) = l$ dla $l \in X - \left\{ a_1^i, ..., a_{n_i}^i \right\}$ powstaje permutacja f_i zwana **cyklem** ;

oznaczenie cyklu - $f_i = \left[a_1^i, ..., a_{n_i}^i \right]$ np. $f_1 = [1, 5, 4]$ i $f_2 = [2, 3]$

ROZKŁAD PERMUTACJI NA CYKLE

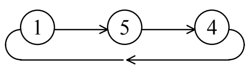
Każdą permutację $f \in S_n$ można przedstawić w postaci złożenia k cykli ($1 \le k \le n$) o długościach $n_1, ..., n_k$ ($n_1 + ... + n_k = n$):

$$f = \left[a_1^1, a_2^1, ..., a_{n_1}^1 \right] \left[a_1^2, a_2^2, ..., a_{n_2}^2 \right] \; ... \; \left[a_1^k, a_2^k, ..., a_{n_k}^k \right]$$

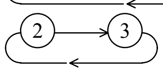
Przykład rozkładu permutacji na cykle

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad f = f_1 f_2$, gdzie $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ i $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

permutacja f_1 odpowiada cyklowi



permutacja f_2 odpowiada cyklowi



Zapisujemy: $f_1 = [\, 1, 5, 4 \,]$, $f_2 = [\, 2, 3 \,]$ i $f = [\, 1, 5, 4 \,] [\, 2, 3 \,]$

Definicja

Mówimy, że permutacja jest **typu ($\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$)** , jeśli zawiera w rozkładzie na cykle dokładnie λ_i cykli o długości i dla $i = 1, 2, ..., n$.

Typ permutacji zapisujemy: $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} ... n^{\lambda_n}$ $\qquad$ (symbol i^{λ_i} pomijamy w zapisie, jeśli $\lambda_i = 0$)

Przykład oznaczania typu permutacji

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{rozkład na cykle:} \quad f = [\,1, 7, 6, 3\,]\,[\,2, 5\,]\,[\,4\,]\,[\,8, 9\,]$$

typ permutacji: $1^1\,2^2\,4^1$

Definicja

Parę (a_i, a_j), dla $i < j$, nazywamy **inwersją** w permutacji $(a_1, a_2, ..., a_n)$, jeśli $a_i > a_j$.

Liczbę wszystkich inwersji w permutacji $f \in S_n$ oznaczamy $\mathbf{I}(f)$

Definicja

Znakiem permutacji $f \in S_n$ nazywamy liczbę $\operatorname{sgn}(f) = (-1)^{I(f)}$.

Przykład wyznaczania znaku permutacji

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; inwersje w f: (5, 3), (5, 2), (5, 1), (5, 4), (3, 2), (3, 1), (2, 1)

$\mathrm{I}(f) = 7$; znak permutacji $\operatorname{sgn}(f) = (-1)^7 = -1$

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; inwersje w g: (3, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2)

$\mathrm{I}(g) = 4$; znak permutacji $\operatorname{sgn}(g) = (-1)^4 = 1$

Definicja

Permutację $f \in S_n$ nazywamy **parzystą**, jeśli $\operatorname{sgn}(f) = 1$, albo **nieparzystą**, jeśli $\operatorname{sgn}(f) = -1$.

Definicja

Permutację, która jest cyklem o długości **2**, nazywamy **transpozycją**.

Przykład transpozycji

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = [\,3, 5\,]$$

Lemat

Dowolną permutację $f \in S_n$ można przedstawić w postaci złożenia $\mathrm{I}(f)$ transpozycji sąsiednich elementów
(tzn. transpozycji postaci $[\,i, i{+}1\,]$)

Przykład rozkładu na transpozycje

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{I}(f) = 4$: $f = [2, 3]\,[3, 4]\,[4, 5]\,[1, 2]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ [1, 2] \\ [4, 5] \\ [3, 4] \\ [2, 3] \end{array}$$

Lemat

Dla dowolnych permutacji $f, g \in S_n$ $\operatorname{sgn}(fg) = \operatorname{sgn}(f) \cdot \operatorname{sgn}(g)$.

Lemat

Znak dowolnego cyklu o długości k jest równy $(-1)^{k-1}$

Lemat

Każda transpozycja jest permutacją nieparzystą.
(bo jest cyklem o długości 2)

Przykład wyznaczania znaku permutacji

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix};$ rozkład na cykle: $f = [\ 1, 7, 6, 3\ ]\ [\ 2, 5\ ]\ [\ 4\ ]\ [\ 8, 9\ ]$

znaki poszczególnych cykli: $\mathrm{sgn}([1, 7, 6, 3]) = (-1)^3 = -1$, $\mathrm{sgn}([2, 5]) = (-1)^1 = -1$, $\mathrm{sgn}([4]) = (-1)^0 = 1$, $\mathrm{sgn}([8, 9]) = (-1)^1 = -1$

znak permutacji $\mathrm{sgn}(f) = (-1)\cdot(-1)\cdot 1\cdot(-1) = -1$ i permutacja jest nieparzysta

Twierdzenie

Znak dowolnej permutacji $f \in S_n$, która jest typu $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots n^{\lambda_n}$ wyraża się wzorem

$$\mathrm{sgn}(f) = (-1)^{\sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \lambda_{2j}}$$

Przykład wyznaczania znaku permutacji z twierdzenia o typie

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix};$ $n = 9$, $\lfloor n/2 \rfloor = \lfloor 4{,}5 \rfloor = 4$

rozkład na cykle: $f = [\ 1, 7, 6, 3\ ]\ [\ 2, 5\ ]\ [\ 4\ ]\ [\ 8, 9\ ]$; typ permutacji: $1^1\, 2^2\, 4^1$

$\mathrm{sgn}(f) = (-1)^{\sum_{j=1}^{4} \lambda_{2j}} = (-1)^{\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6+\lambda_8} = (-1)^{2+1} = -1$ i permutacja jest nieparzysta.

PODZBIORY ZBIORU

$X = \{\ x_1, ..., x_n\ \}$, (X) - zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X

dla dowolnego podzbioru $Y \in (X)$ wyznaczamy jego **wektor charakterystyczny** $\xi(\ Y\ ) = (\ b_1, b_2, ..., b_n\ )$ według wzoru:

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x_i \in Y \\ 0 & \text{jeśli } x_i \notin Y \end{cases}, \qquad \text{dla } i = 1, ..., n$$

- dowolny wektor $(\ b_1, b_2, ..., b_n\ )$, gdzie $b_i \in \{\ 0, 1\ \}$, jednoznacznie wyznacza pewien podzbiór zbioru X
- wektor charakterystyczny może być utożsamiony z funkcją $f : \{\ 1, 2, ..., n\ \} \to \{\ 0, 1\ \}$

$\Rightarrow \quad |\ (X)\ | = 2^n$

Generowanie podzbiorów zbioru *X*

wektorowi charakterystycznemu $(\ b_1, b_2, ..., b_n\ )$, gdzie $b_i \in \{\ 0, 1\ \}$,
odpowiada liczba z przedziału $[\ 0; 2^n - 1\ ]$

Przykład

$X = \{$ a, b, c, d, e $\}$, $Y = \{$ b, d, e $\} \subseteq X$, n = 5 ; $\xi(\ Y\ ) = (\ \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}\ )$

$\mathbf{01011} = \mathbf{0}\cdot 2^4 + \mathbf{1}\cdot 2^3 + \mathbf{0}\cdot 2^2 + \mathbf{1}\cdot 2^1 + \mathbf{1}\cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = \mathbf{11} \in [\ 0; 31\ ]$

Zatem wypisując po kolei wszystkie liczby z przedziału $[\ 0; 2^n - 1\ ]$ i zapisując je w systemie dwójkowym można wskazać wszystkie podzbiory zbioru *n*-elementowego.

Binarny kod Grey'a rzędu *n*

służy do generowania wszystkich podzbiorów zbioru *n*-elementowego w taki sposób, że każdy kolejno wyznaczony podzbiór powstaje z poprzedniego przez dodanie lub odjęcie tylko jednego elementu.

$n \in$, $n \geq 1$, $m = 2^n$

Kod Grey'a powstaje **rekurencyjnie**:

- dla $n = 1$ mamy dwa jednoelementowe wektory binarne: $C_1 = (\ 0\ )$ i $C_2 = (\ 1\ )$

- jeśli dla $n > 1$ mamy ciąg wektorów binarnych $C_1, C_2, ..., C_m$ n-elementowych, w których dwa sąsiednie wektory różnią się dokładnie na jednej pozycji, to tworzymy ciąg wektorów binarnych $(n+1)$-elementowych według schematu:
  $(C_1, 0), (C_2, 0), ..., (C_{m-1}, 0), (C_m, 0), (C_m, 1), (C_{m-1}, 1), ..., (C_1, 1)$

Przykład

$n = 1$	:	0	1						
$n = 2$	:	00	10	11	01				
$n = 3$	:	000	100	110	010	011	111	101	001
$n = 4$	:	0000	1000	1100	0100	0110	1110	1010	0010
		0011	1011	1111	0111	0101	1101	1001	0001
$n = 5$	:	00000	10000	11000	01000	01100	11100	10100	00100
		00110	10110	11110	01110	01010	11010	10010	00010
		00011	10011	11011	01011	01111	11111	10111	00111
itd.		00101	10101	11101	01101	01001	11001	10001	00001

PODZBIORY *k*-ELEMENTOWE

$X = \{ x_1, ..., x_n \}, \quad k \le n$

Przyjmijmy oznaczenie:

$\binom{n}{k}$ - liczba wszystkich podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego (współczynnik dwumianowy)

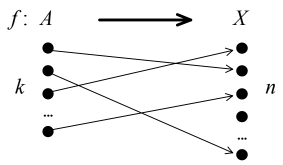
Symbol używany w rozwinięciu dwumianu: $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

Twierdzenie

$$\binom{n}{k} = \frac{[n]_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}$$

Dowód

Każda funkcja różnowartościowa $f: A \to X$, gdzie $|A| = k$ i $k \le n$, wyznacza k-elementowy podzbiór zbioru n-elementowego X:



Takich funkcji jest $[\,n\,]_k$. Ale $k!$ różnych funkcji wyznacza ten sam podzbiór - obraz zbioru A w każdej z nich jest taki sam. Stąd liczba podzbiorów k-elementowych zbioru X wynosi $[n]_k / k!$. ■

Tożsamości związane ze współczynnikami dwumianowymi:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i = n 2^{n-1} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Trójkąt Pascala:

wiersze są numerowane 0, 1, 2, ...

i-ty wiersz zawiera kolejno elementy $\binom{i}{0}, \binom{i}{1}, ..., \binom{i}{i}$

$$\binom{n}{k}$$

	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$n=0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0	
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0	
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0	
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0	
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	
...							...							

I jeszcze kilka tożsamości dla współczynników dwumianowych:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{s=0}^{k}\binom{m}{s}\binom{n}{k-s} \qquad \binom{2n}{n} = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}^2 \qquad \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}+\binom{n-m}{n-k}$$